Abgabe Hausarbeit SoSe 2023

Franjo Gießel, [redacted] fragiessel

2.12 Mathematik II

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Abgabe ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Ich bestätige die Prüfungshinweise gelesen und verstanden zu haben.

[redacted]

Bremerhaven, den 29. September 2023

Aufgabe 1) Lösungsschritte nach [2.3.4 Aufgabe 5]

gesucht: Mischungsverhältnis $x\,m^2 + y\,m^2 = 3m^2$

$$X \cdot 500g + y \cdot 10 = 3m^2 \cdot 359\,g/m^2$$

gegeben: $g = 500\,g/m^2$

$s = 10\,g/m^2$

Ausreichende Menge beider Papiermassen

Ergebnis des Mischens: $3m^2$ bei $359\,g/m^2$

x_g ist Menge von Golf-Double-Density

x_s ist Menge von Schejem-Ultra-Ligt-Extra

$$A = \begin{pmatrix} g & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 359 \cdot 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 500 & 10 & 1.077 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Kurzschreibweise nach [2.1.3 Definition 3.2.1]

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 500 \cdot x_g + 10 \cdot x_s = 1.077 \\ \text{II} & 1 \cdot x_g + 1 \cdot x_s = 3 \end{array}$$

Die beiden Gleichungen besagen Folgendes:

1. Die Menge x_g der Rohpapiermasse Golf-Double-Density mit einer Dichte von $500\,g/m^2$ summiert mit der Menge x_s der Rohmasse Schejem-Ultra-Light-Extra mit einer Dichte von $10\,g/m^2$ soll gesamt eine Mischmasse mit einer Dichte von $359\,g/m^2$ für $3m^2$ ergeben.
   Ich rechne mit absoluten Zahlen, weshalb im Ergebnisvektor $359\,g/m^2 \cdot 3m^2 = 1.077$ steht.

2. Die Menge x_g der Rohpapiermasse Golf-Double-Density summiert mit der Menge x_s der Rohmasse Schejem-Ultra-Light-Extra soll gesamt eine Mischmasse für gesamt $3\,m^2$ ergeben.

Lösen durch Gauß-Jordan-Verfahren

Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens nach [2.1.3 Folie 3.2]

Berechnungen mit [1.1]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 500 & 10 & 1.077 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\text{I} \leftrightarrow \text{II} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 500 & 10 & 1.077 \end{array}\right)$$

$$\text{II} = \text{II} - 500\,\text{I} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -490 & -423 \end{array}\right)$$

$$\text{II} = \text{II} \cdot \frac{1}{-490} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{423}{490} \end{array}\right)$$

$$\text{I} = \text{I} - \text{II} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1.047}{490} \\ 0 & 1 & \frac{423}{490} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_g = 1.047/490, \quad x_s = \frac{423}{490}$$

Beide Werte sind positiv und somit plausibel.

Probe: I $1.047/490\,m^2 \cdot 500\,g/m^2 + 423/490\,m^2 \cdot 10\,g/m^2 = 1.077$ ✓

II $1.047/490\,m^2 + 423/490\,m^2 = 3$ ✓

Mische $1.047/490$ Quadratmeter Golf-Double-Density mit $423/490$ Quadratmeter Schejem-Ultra-Light-Extra und erhalte 3 Quadratmeter mit einem Papiergewicht von 359 g pro Quadratmeter.

Aufgabe 2) Berechnungen teilweise mit [1.1]

Definition ähnlicher Matrizen nach [2.1.6 Definition 6.0.1]

Anwendung der Eigenschaften der Matrixmultiplikation [2.1.2 Satz 2.2.2]

Einheitsmatrix nach [2.1.2 Folie 2-4]

Anwendung [2.1.2 Folgerung 2.2.4]

$B = U^{-1} A U \quad |$ links aufmultipliziert U

$\Rightarrow U \cdot B = U \cdot U^{-1} \cdot A \cdot U \Rightarrow U \cdot B = E \cdot A \cdot U$

$\Rightarrow U \cdot B = A \cdot U \qquad | U \hat{=} I, B \hat{=} Q, A \hat{=} R$

$\Rightarrow I \cdot Q = R \cdot I$

Anwendung der Schritte aus [2.1.6 Folie 6-10]

1. Charakteristisches Polynom $\chi_R(\lambda)$ berechnen
2. Berechnung der Nullstellen λ_j von χ_R
3. Lösen des homogenen LGS für jeden Eigenwert λ_j

Schritt 1) Charakteristisches Polynom $\chi_R(\lambda)$ berechnen

Anwendung der Definition des char. Polynoms [2.1.6 Def. 6.0.5]

$\chi_R(\lambda) = \det(R - \lambda E)$

Anwendung der Skalarmultiplikation [2.1.2 Folie 2-7],
Anwendung der Matrixaddition [2.1.2 Folie 2-6],
Anwendung der Definition der Determinante [2.1.4 Def. 4.2.1]
und der Regel für 2x2 Matrizen [2.1.4 Folie 4-5]

$$\chi_R(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 47-\lambda & 41 \\ -19 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{n=2}{=} (47-\lambda)(7-\lambda) - 41 \cdot (-19) = 329 - 7\lambda - 47\lambda + \lambda^2 + 779$$

$$\underline{\chi_R(\lambda) = \lambda^2 - 54\lambda + 1.108}$$

Schritt 2) Berechnung der Nullstellen λ_j von χ_R

Anwendung der PQ-Formel zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion 2. Grades
Berechnungen mit [1.1], Anwendung [2.1.6 Def. 6.0.3]

$\chi_R(\lambda) = \lambda^2 - 54\lambda + 1.108 \quad | \frac{p}{2} = -27 ; q = 1.108$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 27 \pm \sqrt{(-27)^2 - 1.108}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 27 \pm \sqrt{-379}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} \approx 27 \pm 19{,}468 i$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{matrix}\lambda_1 = 27 - \sqrt{-379} \\ \lambda_2 = 27 + \sqrt{-379}\end{matrix}} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Nach Def. der Eigenwerte sind diese Element der komplexen Zahlen, das Ergebnis ist also plausibel.
Ich prüfe die ermittelten Werte mit einer Probe:

$\chi_R(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \chi_R(\lambda_1) = 0 \wedge \chi_R(\lambda_2) = 0$

$\Rightarrow \chi_R(\lambda_1) = \chi_R(27-\sqrt{-379}) = (27-\sqrt{-379})^2 - 54 \cdot (27-\sqrt{-379}) + 1.108 = 0$ ✓
$\chi_R(\lambda_2) = \chi_R(27+\sqrt{-379}) = (27+\sqrt{-379})^2 - 54 \cdot (27+\sqrt{-379}) + 1.108 = 0$ ✓

Schritt 3) Lösen des homogenen LGS für jeden Eigenwert λ_j

Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens nach [2.1.3 Folie 3-2]

$(R - \lambda_j E) u_j = 0; \quad \lambda_1 = 27 - \sqrt{-379}$

$$\left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} - (27-\sqrt{-379}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -27+\sqrt{-379} & 0 \\ 0 & -27+\sqrt{-379} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 47-27+\sqrt{-379} & 41 \\ -19 & 7-27+\sqrt{-379} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20+\sqrt{-379} & 41 \\ -19 & -20+\sqrt{-379} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 20+\sqrt{-379} & 41 & 0 \\ -19 & -20+\sqrt{-379} & 0 \end{array}\right)$$ Folgende zwei Schritte mit [5.1]

$$\overset{I = I \cdot \frac{1}{20+\sqrt{-379}}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-\sqrt{-379}+20}{19} & 0 \\ -19 & -20+\sqrt{-379} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{II = II + 19 I}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-\sqrt{-379}+20}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1x_1 + \frac{-\sqrt{-379}+20}{19} x_2 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{-379}-20}{19} x_2 \qquad | x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{-379}-20}{19}; \ x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-379}-20}{19} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_2 = 27 + \sqrt{-379}$

$$\left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} - (27+\sqrt{-379}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -27-\sqrt{-379} & 0 \\ 0 & -27-\sqrt{-379} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 47-27-\sqrt{-379} & 41 \\ -19 & 7-27-\sqrt{-379} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20-\sqrt{-379} & 41 \\ -19 & -20-\sqrt{-379} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 20-\sqrt{-379} & 41 & 0 \\ -19 & -20-\sqrt{-379} & 0 \end{array}\right)$$ Folgende zwei Schritte mit [5.1]

$$\overset{I = I \cdot \frac{1}{20+\sqrt{-379}}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\sqrt{-379}+20}{19} & 0 \\ -19 & -20+\sqrt{-379} & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{II = II + 19 I}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{\sqrt{-379}+20}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1x_1 + \frac{\sqrt{-379}+20}{19} x_2 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-\sqrt{-379}-20}{19} x_2 \qquad | x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-\sqrt{-379}-20}{19}; \ x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{-379}-20}{19} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

nach [2.1.6 Definition 6.0.3]
Die „Umwandlungsmatrix" I ergibt sich aus den Spaltenvektoren u_1, u_2.

$$\underline{\underline{I = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-379}-20}{19} & \frac{-\sqrt{-379}-20}{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Die Diagonalmatrix Q ergibt sich aus den Eigenwerten λ_1, λ_2 multipliziert mit E

$$\underline{\underline{Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{-379}+27 & 0 \\ 0 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix}}}$$

Probe

Die Probe erfolgt mittels der Webseite [5.1]

$I Q = R I$

$$I Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-379}-20}{19} & \frac{-\sqrt{-379}-20}{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{-379}+27 & 0 \\ 0 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} & \frac{-47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} \\ -\sqrt{-379}+27 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix}$$

$$R I = \begin{pmatrix} 47 & 41 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-379}-20}{19} & \frac{-\sqrt{-379}-20}{19} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} & \frac{-47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} \\ -\sqrt{-379}+27 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} & \frac{-47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} \\ -\sqrt{-379}+27 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} & \frac{-47 \cdot \sqrt{-379} - 161}{19} \\ -\sqrt{-379}+27 & \sqrt{-379}+27 \end{pmatrix}}}$$

Die Probe hat gezeigt, dass gilt $IQ = RI$, wie in der Aufgabenstellung gefordert. Dabei ist Q eine Diagonalmatrix [2.1.2 Folie 2-2] und I eine Matrix ungleich der Nullmatrix [2.1.2 Folie 2-4]

Aufgabe 3) Berechnungen teilweise mit [1.1]

Kurzschreibweise nach [2.1.3 Definition 3.2.1]

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ \delta & -\beta & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

1. Bestimmung, für welche δ, β das LGS eindeutig lösbar ist

Drei Varianten zur Lösungsbestimmung nach [2.3.4 Lösung 4]

i) Berechnen der Determinante und Testen, ob diese 0 ist,
ii) Prüfen, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind und
iii) Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus

i) Berechnen der Determinante und Testen, ob diese 0 ist

Anwendung der Definition der Determinante [2.1.4 Def. 4.2.1]
und der Regel Sarrus (Regel für 3x3 Matrizen) [2.1.4 Folie 4-7]

$$\det(A) \overset{\text{Sarrus}}{=} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 \\ \delta & -\beta & 11 \\ 9 & 11 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 4\cdot(-\beta)\cdot 2 + 11\cdot 11\cdot 9 + 9\cdot\delta\cdot 11 - 9\cdot(-\beta)\cdot 9 - \delta\cdot 11\cdot 2 - 4\cdot 11\cdot 11$$

$$= -8\beta + 1.089 + 99\delta + 81\beta - 22\delta - 484$$

$$\Rightarrow \underline{\det(A) = 73\beta + 77\delta + 605}$$

Nach [2.1.4 Satz 4.2.7] produziert der Gauß-Jordan-Algorithmus für $Ax=b$ genau dann eine Nullzeile, wenn $\det(A)=0$ ist. Umgekehrt nach dem Beweis [2.1.4 Folie 4-15] sind die Zeilen-, bzw. Spaltenvektoren linear unabhängig, wenn $\det(A) \neq 0$.
Entsprechend suche ich jetzt nach einer Relation zwischen β und δ, die nicht zutreffen darf, damit $\det(A) \neq 0$ und damit das LGS eindeutig lösbar ist.

$$\Rightarrow \det(A) = 0$$

$$\Rightarrow 73\beta + 77\delta + 605 = 0 \qquad | -605$$

$$\Rightarrow 73\beta + 77\delta = -605 \qquad | -77\delta$$

$$\Rightarrow 73\beta = -77\delta - 605 \qquad | \cdot \tfrac{1}{73}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = \frac{-77\delta - 605}{73}}}$$

Die Bedingung $\beta = \frac{-77\delta-605}{73}$ darf nicht zutreffen, somit ist für $\beta \neq \frac{-77\delta-605}{73}$ die Determinante ungleich Null und das LGS eindeutig lösbar. δ darf dabei frei gewählt werden.

ii) Prüfen, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind

Nach [2.1.1 Definition 1.2.5] sind p Vektoren linear unabhängig, wenn es für die Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{p} k_j a_j = 0$$

nur die triviale Lösung nach [2.1.1 Folie 1-17] gibt.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 0 \\ \text{II} \quad & \delta x_1 - \beta x_2 + 11x_3 = 0 \\ \text{III} \quad & 9x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

III nach x_3 umstellen

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 9x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 0 && | -2x_3 \\ \Rightarrow \quad & 9x_1 + 11x_2 = -2x_3 && | \cdot \tfrac{-1}{2} \\ & \underline{\tfrac{-9}{2}x_1 + \tfrac{-11}{2}x_2 = x_3} \end{aligned}$$

x_3 aus III in I einsetzen, I nach x_1 umstellen

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4x_1 + 11x_2 + 9\left(\tfrac{-9}{2}x_1 + \tfrac{-11}{2}x_2\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 4x_1 + 11x_2 - \tfrac{81}{2}x_1 - \tfrac{99}{2}x_2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & -\tfrac{73}{2}x_1 - \tfrac{77}{2}x_2 = 0 && | + \tfrac{73}{2}x_1 \\ \Rightarrow \quad & -\tfrac{77}{2}x_2 = \tfrac{73}{2}x_1 && | \cdot \tfrac{2}{73} \\ \Rightarrow \quad & \underline{-\tfrac{77}{73}x_2 = x_1} \end{aligned}$$

x_1 aus I einsetzen in III

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & \tfrac{-9}{2}x_1 + \tfrac{-11}{2}x_2 = x_3 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{-9}{2}\left(\tfrac{-77}{73}x_2\right) + \tfrac{-11}{2}x_2 = x_3 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{693}{146}x_2 + \tfrac{-11}{2}x_2 = x_3 \\ \Rightarrow \quad & \underline{\tfrac{-55}{73}x_2 = x_3} \end{aligned}$$

x_1 aus I in II, x_3 aus III in II einsetzen

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & \delta x_1 - \beta x_2 + 11x_3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \delta\left(\tfrac{-77}{73}\right) - \beta x_2 + 11\cdot\left(\tfrac{-55}{73}x_2\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{-77}{73}x_2\delta - \beta x_2 - \tfrac{605}{73}x_2 = 0 && | \, x_2 \text{ ausklammern} \\ \Rightarrow \quad & x_2\left(\tfrac{-77}{73}\delta - \beta - \tfrac{605}{73}\right) = 0 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung. Ein Produkt wird 0, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist.

1. Fall: $x_2 = 0$ 2. Fall: $\left(\frac{-77}{73}\delta - \beta - \frac{605}{73}\right) = 0$

Der erste Fall entspricht der trivialen Lösung, da auch x_1 und x_2 gleich 0 werden (siehe weiter oben). Damit wären die Vektoren linear unabhängig und das LGS eindeutig lösbar. Wenn der zweite Fall jedoch zutrifft, gäbe es eine weitere als die triviale Lösung, die Vektoren wären dann nicht mehr linear unabhängig und das LGS nicht mehr eindeutig lösbar. Nach [2.1.3 Definition 3.2.3 und Satz 3.2.6].
Folgend werde ich den zweiten Fall nach β umstellen, um eine Relation zwischen β und δ zu finden, die nicht zutreffen darf.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \tfrac{-77}{73}\delta - \beta - \tfrac{605}{73} = 0 && | + \beta \\ \Rightarrow \quad & \underline{\underline{\tfrac{-77\delta - 605}{73} = \beta}} \end{aligned}$$

Die Bedingung $\beta = \frac{-77\delta-605}{73}$ darf nicht zutreffen, somit sind für $\beta \neq \frac{-77\delta-605}{73}$ die Vektoren linear unabhängig und das LGS eindeutig lösbar. δ darf dabei frei gewählt werden.

iii) Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ \delta & -\beta & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Tausche Spalte x_1 mit x_3

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 11 & 4 & 10 \\ 11 & -\beta & \delta & 8 \\ 2 & 11 & 9 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{II} \leftrightarrow \text{III} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 11 & 4 & 10 \\ 2 & 11 & 9 & 6 \\ 11 & -\beta & \delta & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{I} = \text{I}\cdot\tfrac{1}{9} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 2 & 11 & 9 & 6 \\ 11 & -\beta & \delta & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{II} = \text{II} - 2\text{I} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 0 & 77/9 & 73/9 & 34/9 \\ 11 & -\beta & \delta & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{II} = \text{II}\cdot\tfrac{9}{77} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 0 & 1 & 73/77 & 34/77 \\ 11 & -\beta & \delta & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{III} = \text{III} - 11\cdot\text{I} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 0 & 1 & 73/77 & 34/77 \\ 0 & \left(-\beta - \frac{121}{9}\right) & \left(\delta - \frac{44}{9}\right) & -38/9 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{III} = \text{III} - \left(-\beta - \tfrac{121}{9}\right)\text{II} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 0 & 1 & 73/77 & 34/77 \\ 0 & 0 & \left(\delta - \frac{44}{9}\right) - \left(-\beta - \frac{121}{9}\right)\cdot\frac{73}{77} & -38/9 - \left(-\beta - \frac{121}{9}\right)\frac{34}{77} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11/9 & 4/9 & 10/9 \\ 0 & 1 & 73/77 & 34/77 \\ 0 & 0 & \delta + \frac{73}{77}\cdot\beta + \frac{55}{7} & \frac{34}{77}\beta + 12/7 \end{array}\right) \end{array}$$

Nach [2.1.3 Satz 3.2.6] hat ein LGS $Ax=b$ in Zeilenstufenform entweder

1. keine Lösung,
2. unendlich viele Lösungen oder
3. genau eine Lösung

Für meinen Fall bedeutet das Folgendes:

1. Ist $\delta + \frac{73}{77}\cdot\beta + \frac{55}{7} = 0$ und $\frac{34}{77}\beta + 12/7 \neq 0$, so enthält die letzte Zeile einen Widerspruch:

   $$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \neq 0 \ \lightning$$

   Das LGS ist somit nicht lösbar.

2. Ist $\delta + \frac{73}{77}\cdot\beta + \frac{55}{7} = 0$ und $\frac{34}{77}\beta + 12/7 = 0$, so hat die letzte Zeile einen Freiheitsgrad und das LGS entsprechend unendlich viele Lösungen.

3. Ist $\delta + \frac{73}{77}\cdot\beta + \frac{55}{7} \neq 0$, so hat das LGS genau eine Lösung. Folgend werde ich den zweiten Fall nach β umstellen,

$$\delta + \tfrac{73}{77}\cdot\beta + \tfrac{55}{7} = 0 \qquad | -\tfrac{73}{77}\cdot\beta$$

$$\Rightarrow \delta + \tfrac{55}{7} = -\tfrac{73}{77}\cdot\beta \qquad | \cdot \tfrac{-77}{73}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{-77\delta - 605}{73} = \beta}}$$

Die Bedingung $\beta = \frac{-77\delta-605}{73}$ darf nicht zutreffen, somit ist für $\beta \neq \frac{-77\delta-605}{73}$ die Matrix A von vollem Rang und damit das LGS eindeutig lösbar. δ darf dabei frei gewählt werden.

Alle Verfahren liefern dieselbe Bedingung für β in Relation zu δ. Ich gehe entsprechend von der Korrektheit der Bedingung aus.
Ich prüfe das Ergebnis durch zwei Proben, einmal für eine Belegung für β, δ die die Bedingung erfüllen und eine Belegung, die die Bedingung nicht erfüllen.
Die Probe führe ich mittels der Gauß-Jordan-Algorithmus-Implementierung meines [1.1].

I) Bedingung für β, δ wird erfüllt

$$\beta = 1, \ \delta = 1$$

$$\Rightarrow 1 \neq \frac{-77\cdot 1 - 605}{73}$$

$$\Rightarrow 1 \neq -\frac{682}{73} \ \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ \delta & -\beta & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ 1 & -1 & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 166/755 \\ 0 & 1 & 0 & 176/755 \\ 0 & 0 & 1 & 110/151 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 166/755; \ x_2 = 176/755; \ x_3 = 110/151$$

Einsetzen der Ergebnisse in das LGS

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 4\cdot 166/755 + 11\cdot 176/755 + 9\cdot 110/151 = 10 \\ \text{II} \quad & 1\cdot 166/755 - 1\cdot 176/755 + 11\cdot 110/151 = 8 \\ \text{III} \quad & 9\cdot 166/755 + 11\cdot 176/755 + 2\cdot 110/151 = 6 \ \checkmark \end{aligned}$$

Die erste Probe hat gezeigt, dass mit einer Belegung von β, δ die die Bedingung erfüllen, das LGS eindeutig lösbar ist und die resultierenden Ergebnisse korrekt sind.

II) Bedingung für β, δ wird nicht erfüllt

$$\beta = \frac{-1.452}{73}, \ \delta = 11$$

$$\Rightarrow \frac{-1.452}{73} \neq \frac{-77\cdot 11 - 605}{73}$$

$$\Rightarrow \frac{-1.452}{73} \neq \frac{-1.452}{73} \ \lightning$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ \delta & -\beta & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 11 & 9 & 10 \\ 11 & \frac{1.452}{73} & 11 & 8 \\ 9 & 11 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/5 & 0 \\ 0 & 1 & 73/55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ \lightning$$

Die zweite Probe hat gezeigt, dass mit einer Belegung von β, δ die die Bedingung nicht erfüllen, das LGS nicht eindeutig lösbar ist.

2. Matrix negativ definit und lösbar.

Nach [2.1.6 Definition 6.0.16] ist Definitheit nur für symmetrische Matrizen definiert. Nach [2.1.2 Definition 2.1.1] ist eine symmetrische Matrix gleich ihrer Transponierten.
Die einzig mögliche Belegung für β, δ, für die die Matrix A symmetrisch ist, ist

$$\delta = 11, \ \beta \text{ beliebig}$$

Anhand der ersten Aufgabe können wir die erste Bedingung für β ausrechnen.

$$\beta \neq \frac{-77\delta - 605}{73} \overset{\delta=11}{\Rightarrow} \beta \neq \frac{-77\cdot 11 - 605}{73} \Rightarrow \underline{\beta \neq \frac{-1.452}{73}}$$

Mit dieser Einschränkung von β kann ich bereits sagen, dass das LGS eindeutig lösbar ist.

Tipp für online-Quelle von [3.2]

Nach [5.2] müssen alle ungeraden Minore der Matrix negativ, alle geraden Minore positiv sein.

$$\Delta_1 = \det(4) = 4 \qquad \text{nach [2.1.4 Definition 4.2.1]}$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 11 & -\beta \end{pmatrix} \overset{n=2}{=} 4\cdot(-\beta) - 11^2 = \underline{-4\beta - 121} \qquad \text{nach [2.1.4 Folie 4-5]}$$

nach [2.1.4 Folie 4-7]

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 11 & -\beta & 11 \\ 9 & 11 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 4\cdot(-\beta)\cdot 2 + 2\cdot 11^2\cdot 9 - 9^2(-\beta) - 11^2\cdot 2 - 11^2\cdot 4$$
$$= -8\beta + 2.178 + 81\beta - 242 - 484$$
$$= \underline{73\beta + 1.452}$$

Der erste Minor Δ_1 müsste nach [5.2] negativ sein. Da dieser weder von β, δ abhängig und deshalb konstant ist, kann die Matrix für beliebige β, δ nicht negativ definit werden.

Aufgabe 4) Berechnungen teilweise mit [1.1]

Aus dem gegebenen Graphen lese ich folgende vier Stützpunkte s_j ab:

$s_0 = (-4 \; ; \; 2{,}5)$
$s_1 = (0 \; ; \; -4)$
$s_2 = (2 \; ; \; 0)$
$s_3 = (2{,}5 \; ; \; 3)$

Anschließend erzeuge ich hieraus ein Polynom mit dem Lagrange-Verfahren nach [2.1.7 Satz 7.2.2]. Dieses ist eine Lösung für das Interpolationsproblem [2.1.7 Folie 7-17] für $n+1$ Stützpunkte. Ich habe 4 Stützpunkte abgelesen, somit ist mein $n = 3$.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k \prod_{j=0, j\neq k}^{3} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$= y_0 \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_0-x_3} + y_1 \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + y_3 \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

$$= 2{,}5 \cdot \frac{x-0}{-4-0} \cdot \frac{x-2}{-4-2} \cdot \frac{x-2{,}5}{-4-2{,}5} - 4 \cdot \frac{x-(-4)}{0-(-4)} \cdot \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-2{,}5}{0-2{,}5} + 0 \cdot \frac{x-(-4)}{2-(-4)} \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-2{,}5}{2-2{,}5} + 3 \cdot \frac{x-(-4)}{2{,}5-(-4)} \cdot \frac{x-0}{2{,}5-0} \cdot \frac{x-2}{2{,}5-2}$$

$$= 2{,}5 \cdot \frac{x}{-4} \cdot \frac{x-2}{-6} \cdot \frac{x-2{,}5}{-6{,}5} - 4 \cdot \frac{x+4}{4} \cdot \frac{x-2}{-2} \cdot \frac{x-2{,}5}{-2{,}5} + 3 \cdot \frac{x+4}{6{,}5} \cdot \frac{x}{2{,}5} \cdot \frac{x-2}{0{,}5}$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot x(x-2)(x-2{,}5)}{-156} - \frac{4(x+4)(x-2)(x-2{,}5)}{20} + \frac{3 \cdot (x+4) \cdot x \cdot (x-2)}{8}$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot (x^2-2x)(x-2{,}5)}{-156} - \frac{4(x^2+2x-8)(x-2{,}5)}{20} + \frac{3 \; (x^2+4x)(x-2)}{8}$$

$$= \frac{2{,}5 \; (x^3-4{,}5x^2+5x)}{-156} - \frac{4(x^3-0{,}5x^2-13x+20)}{20} + \frac{3(x^3+2x^2-8x)}{8{,}125}$$

$$= \frac{-12{,}5 \; (x^3-4{,}5x^2+5x)}{780} - \frac{156 \; (x^3-0{,}5x^2-13x+20)}{780} + \frac{288 \; (x^3+2x^2-8x)}{780}$$

$$= \frac{-12{,}5x^3+56{,}25x^2-62{,}5x}{780} - \frac{156x^3-78x^2-2.028x+3.120}{780} + \frac{288x^3+576x^2-2.304x}{780}$$

$$= \frac{-12{,}5x^3+56{,}25x^2-62{,}5x-156x^3+78x^2+2.028x-3.120+288x^3+576x^2-2.304x}{780}$$

$$= \frac{119{,}5x^3+710{,}25x^2-338{,}5x-3.120}{780}$$

$$\underline{p(x) = \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4}$$

1. Probe, ob Polynom die Stützstellen richtig trifft

$s_0 = (-4 \; ; \; 2{,}5)$

$p(-4) = \frac{239}{1.560}(-4)^3 + \frac{947}{1.040}(-4)^2 - \frac{677}{1.560}(-4) - 4$

$\underline{p(-4) = 2{,}5}$ ✓

$s_1 = (0 \; ; \; -4)$

$p(0) = \frac{239}{1.560} 0^3 + \frac{947}{1.040} 0^2 - \frac{677}{1.560} 0 - 4$

$\underline{p(0) = -4}$ ✓

$s_2 = (2 \; ; \; 0)$

$p(2) = \frac{239}{1.560} \cdot 2^3 + \frac{947}{1.040} \cdot 2^2 - \frac{677}{1.560} \cdot 2 - 4$

$\underline{p(2) = 0}$ ✓

$s_3 = (2{,}5 \; ; \; 3)$

$p(2{,}5) = \frac{239}{1.560} \cdot 2{,}5^3 + \frac{947}{1.040} 2{,}5^2 - \frac{677}{1.560} \cdot 2{,}5 - 4$

$\underline{p(2{,}5) = 3}$ ✓

Die Probe hat gezeigt, dass das Polynom seine Stützstellen trifft.

2. Polynomfunktion mit Definitions- & Wertebereich angeben

$d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Anmerkung 1. siehe unten.

$x \mapsto d(x) = \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4$

3. Kurvendiskussion

I) Nullstellen von d

Die erste Nullstelle habe ich bereits aus dem Graphen abgelesen. Diese ist an der Stelle $x_1 = 2$.
Mit dieser ersten Nullstelle führe ich eine Polynomdivision des Funktionsterms durch die erste Nullstelle durch nach [2.1.7 Satz 7.1.8] und [2.3.6 Aufgabe 2].

$s_2 = (2 \; ; \; 0)$ daraus lese ich ab, dass ich in der Polynomdivision durch $x-2$.

$$\frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4 \quad \Big| \cdot \frac{1.560}{239}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{2.841}{478}x^2 - \frac{677}{239}x - \frac{6.240}{239}$$

$$x^3 + \frac{2.841}{478}x^2 - \frac{677}{239}x - \frac{6.240}{239} : (x-2) = \underline{\underline{x^2 + \frac{3.797}{478}x + \frac{3.120}{239}}}$$

$$\frac{-(x^3 - 2x^2)}{\frac{3.797}{478}x^2 - \frac{677}{239}x}$$

$$\frac{-\left(\frac{3.797}{478}x^2 - \frac{3.797}{239}x\right)}{\frac{3.120}{239}x - \frac{6.240}{239}}$$

$$\frac{-\left(\frac{3.120}{239}x - \frac{6.240}{239}\right)}{0}$$

Gelöst von Hand. Teilen und Verrechnen der Brüche mit [1.1]

Den Term, den die Polynomdivision ergeben hat, hat den Grad 2. Hierfür darf ich zur Nullstellensuche die PQ-Formel anwenden.

$$x^2 + \frac{3.797}{478}x + \frac{3.120}{239} = 0 \quad \Big| \; \frac{p}{2} = \frac{3.797}{956}, \; q = \frac{3.120}{239}$$

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = -\frac{3.797}{956} \pm \sqrt{\left(\frac{3.797}{956}\right)^2 - \frac{3.120}{239}}$$

Anmerkung: Da mein Taschenrechner [1.1] $(P/2)^2$ nicht mehr als Bruch darstellen kann, habe ich einen gerundeten Wert mit 4 Nachkommastellen genutzt. Da das Polynom ohnehin nur eine Annäherung an den abgelesenen Graphen ist, sehe ich das als legitim an.

$$\Rightarrow x_{2,3} \approx -\frac{3.797}{956} \pm \sqrt{15{,}7749 - \frac{3.120}{239}}$$

$$\Rightarrow x_{2,3} \approx -\frac{3.797}{956} \pm \sqrt{2{,}7205}$$

$x_2 \approx -5{,}6$
$\underline{x_3 \approx -2{,}3}$

Die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_3 \approx -2{,}3$ sind nahe der abgelesenen Nullstellen des Graphen. Die Nullstelle $x_2 \approx -5{,}6$ weicht ungefähr 0,8 von der abgelesenen Nullstelle ab. Da das Polynom aber, wie oben erwähnt, nur eine Annäherung ist, sehe ich die gefundenen Werte als plausibel an.

Gelöst von Hand, Brüche und Wurzel ver- bzw. berechnet mit [1.1]

II) alle Ableitungen von d und deren Nullstellen bestimmen

Nach [2.3.9 Aufgabe 1] sind Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ sowohl stetig, als auch differenzierbar. Da d eine Polynomfunktion dritten Grades ist können drei Ableitungen bestimmt werden.
Dafür zerlege ich die Polynomfunktionen in einem Schritt in elementare Funktionen, leite diese nach [2.1.10 Satz 10.2.8] ab und verknüpfe sie wieder nach den Ableitungsregeln [2.1.10 Satz 10.3.2].

$$\underline{d(x) := \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4}$$

$$d'(x) := 3 \cdot \frac{239}{1.560}x^2 + 2 \cdot \frac{947}{1.040}x - \frac{677}{1.560}$$

$$\Rightarrow \underline{d'(x) := \frac{239}{520}x^2 + \frac{947}{520}x - \frac{677}{1.560}}$$

$$d''(x) := 2 \cdot \frac{239}{520}x + \frac{947}{520}$$

$$\Rightarrow \underline{d''(x) := \frac{239}{260}x + \frac{947}{520}}$$

$$\underline{d'''(x) := \frac{239}{260}}$$

Die erste Ableitung $d'(x)$ ist eine Polynomfunktion zweiten Grades. Ich forme sie in die für die PQ-Formel notwendige allgemeine Form

$$x^2 + px + q = 0$$

um.

$$d'(x) := \frac{239}{520}x^2 + \frac{947}{520}x - \frac{677}{1.560} \quad \Big| \cdot \frac{520}{239}$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + \frac{947}{239}x - \frac{677}{717} \quad \Big| \; \frac{p}{2} = \frac{947}{478}, \; q = -\frac{677}{717}$$

$$x'_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x'_{1,2} = -\frac{947}{478} \pm \sqrt{\left(\frac{947}{478}\right)^2 + \frac{677}{717}}$$

$$\Rightarrow x'_{1,2} \approx -\frac{947}{478} \pm \sqrt{3{,}9250 + \frac{677}{717}}$$

$$\Rightarrow x'_{1,2} \approx -\frac{947}{478} \pm \sqrt{4{,}8692}$$

$\Rightarrow x'_1 \approx -4{,}2$
$\underline{x'_2 \approx 0{,}2}$

Die zweite Ableitung ist eine lineare Funktion, die Nullstelle kann durch Gleichsetzen mit 0 und Auflösen nach x.

$$d''(x) := \frac{239}{260}x'' + \frac{947}{520} = 0 \quad \Big| - \frac{947}{520}$$

$$\Rightarrow \frac{239}{260}x'' = -\frac{947}{520} \quad \Big| \cdot \frac{260}{239}$$

$$\Rightarrow \underline{x'' = \frac{-947}{478}}$$

Die dritte Ableitung ist eine konstante Funktion $\forall x \in \mathbb{R}: d'''(x) \neq 0$, sie besitzt somit keine Nullstelle.

Probe:

Ich setze zur Probe die gefundenen Nullstellen in die jeweilige Ableitungsfunktion ein und prüfe, ob es sich tatsächlich um eine Nullstelle handelt.

$$d'(x) := \frac{239}{520}x'^2 + \frac{947}{520}x' - \frac{677}{1.560}$$

$x'_1 \approx -4{,}2$

$$d'(-4{,}2) = \frac{239}{520}(-4{,}2)^2 + \frac{947}{520} \cdot (-4{,}2) - \frac{677}{1560}$$

$$\underline{\Rightarrow d'(-4{,}2) \approx 0{,}02 \approx 0}$$

$x'_2 \approx 0{,}2$

$$d'(0{,}2) = \frac{239}{520} \cdot 0{,}2^2 + \frac{947}{520} \cdot 0{,}2 - \frac{677}{1560}$$

$$\underline{\Rightarrow d'(0{,}2) \approx -0{,}05 \approx 0}$$

$$d''(x) := \frac{239}{260}x'' + \frac{947}{520}$$

$$x'' = \frac{-947}{478}$$

$$d''\left(\frac{-947}{478}\right) = \frac{239}{260} \cdot \frac{-947}{478} + \frac{947}{520}$$

$$\underline{d''\left(\frac{-947}{478}\right) = 0}$$

Die Probe zeigt, dass die gefundenen Nullstellen plausibel sind.

III) Bestimmung der Extremwerte, Wendepunkte und Sattelpunkte

i) Bestimmung der Extremwerte

Nach [2.1.11 Satz 11.2.1] hat die Ausgangsfunktion an der Stelle x_0 ein potentielles (lokales) Extremum, wenn die erste Ableitung an der Stelle x_0 eine Nullstelle hat.
In der vorherigen Teilaufgabe habe ich die beiden Nullstellen der ersten Ableitung von der Funktion d bestimmt. Diese sind

$$x'_1 \approx -4{,}2, \; x'_2 \approx 0{,}2$$

Nach [2.1.11 Satz 11.2.2] prüfe ich die Funktionswerte der zweiten Ableitung an den Stellen x'_1, x'_2.

$x'_1 \approx -4{,}2$

$$d''(x) := \frac{239}{260}x'' + \frac{947}{520}$$

$$\Rightarrow d''(-4{,}2) = \frac{239}{260}(-4{,}2) + \frac{947}{520}$$

$$\underline{\Rightarrow d''(-4{,}2) \approx -2 < 0}$$

Damit handelt es sich um ein lokales Maximum an der Stelle $x_1 \approx -4{,}2$. Ich berechne noch den Funktionswert von $d(-4{,}2)$ um das Maximum als Punkt angeben zu können.

$$d(x) := \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4$$

$$\Rightarrow d(-4{,}2) = \frac{239}{1.560}(-4{,}2)^3 + \frac{947}{1.040}(-4{,}2)^2 - \frac{677}{1.560}(-4{,}2) - 4$$

$$\underline{\Rightarrow d(-4{,}2) \approx 2{,}5}$$

Das erste Extremum ist ein lokales Maximum in dem Punkt $p_1 \approx (-4{,}2 \; ; \; 2{,}5)$. Ein Blick auf den gegebenen Graphen bestätigt das Ergebnis.

$x'_2 \approx 0{,}2$

$$d''(x) := \frac{239}{260}x'' + \frac{947}{520}$$

$$\Rightarrow d''(0{,}2) = \frac{239}{260}(0{,}2) + \frac{947}{520}$$

$$\underline{\Rightarrow d''(0{,}2) \approx 2 > 0}$$

Damit handelt es sich um ein lokales Minimum an der Stelle $x_2 \approx 0{,}2$. Ich berechne noch den Funktionswert von $d(0{,}2)$ um das Minimum als Punkt angeben zu können.

$$d(x) := \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4$$

$$\Rightarrow d(0{,}2) = \frac{239}{1.560}(0{,}2)^3 + \frac{947}{1.040}(0{,}2)^2 - \frac{677}{1.560}(0{,}2) - 4$$

$$\underline{\Rightarrow d(0{,}2) \approx -4}$$

Das zweite Extremum ist ein lokales Minimum in dem Punkt $p_2 \approx (0{,}2 \; ; \; -4)$. Ein Blick auf den gegebenen Graphen bestätigt das Ergebnis.

ii) Bestimmung der Wendepunkte

Nach [2.1.11 Definition 11.1.2 und 2.1.11 Folgerung 11.2.7] wechselt an einer Wendestelle das Vorzeichen der zweiten Ableitung. Anders ausgedrückt handelt es sich um die Nullstellen der zweiten Ableitung unter der Bedingung, dass die x-Achse geschnitten und nicht nur berührt wird. Entsprechend prüfe ich die umliegenden Werte um die Nullstelle der zweiten Ableitung.
Aus vorheriger Teilaufgabe weiß ich, dass die zweite Ableitung eine Nullstelle an der Stelle

$$x''_1 = \frac{-947}{478}$$

hat. Ich prüfe nun die umliegenden Werte, ob das Vorzeichen der Funktionswerte sich ändert

$$x_{-1} = \frac{-948}{478}$$

$$d''(x) := \frac{239}{260}x + \frac{947}{520}$$

$$d''\left(\frac{-948}{478}\right) = \frac{239}{260} \cdot \frac{-948}{478} + \frac{947}{520}$$

$$\underline{\Rightarrow d''\left(\frac{-948}{478}\right) = -\frac{1}{520} < 0}$$

$$x_1 = \frac{-946}{478}$$

$$d''(x) := \frac{239}{260}x + \frac{947}{520}$$

$$d''\left(\frac{-946}{478}\right) = \frac{239}{260} \cdot \frac{-946}{478} + \frac{947}{520}$$

$$\underline{\Rightarrow d''\left(\frac{-946}{478}\right) = \frac{1}{520} > 0}$$

Die Rechnung hat gezeigt, dass an der Stelle $x''_1 = {}^{-947}/_{478}$ das Vorzeichen der zweiten Ableitung wechselt und somit die Bedingung einer Wendestelle erfüllt. Um den Punkt des Wendepunkts angeben zu können, berechne ich anschließend den Funktionswert von x''_1.

$$d(x) = \frac{239}{1.560}x^3 + \frac{947}{1.040}x^2 - \frac{677}{1.560}x - 4$$

$$d\left({}^{-947}/_{478}\right) = \frac{239}{1.560}\left(\frac{-947}{478}\right)^3 + \frac{947}{1.040}\left(\frac{-947}{478}\right)^2 - \frac{677}{1.560}\left(\frac{-947}{478}\right) - 4$$

$$\underline{d\left({}^{-947}/_{478}\right) \approx -0{,}76}$$

Die Funktion d hat in dem Punkt $({}^{-947}/_{478} \; ; \; -0{,}76)$ eine Wendestelle. Das entspricht auch dem abgelesenen Graphen.

iii) Bestimmung der Sattelpunkte

Nach [2.1.11 Definition 11.1.1] handelt es sich um einen Sattelpunkt, wenn die erste Ableitung eine Nullstelle hat, es sich jedoch weder um ein Minimum, noch ein Maximum handelt. Da in vorheriger Teilaufgabe bereits gezeigt wurde, dass alle Nullstellen der ersten Ableitung Extrema der Ausgangsfunktion sind, hat die Funktion d keinen Sattelpunkt. Das entspricht auch dem abgelesenen Graphen.

IV) Bestimmen, wo d konvex und konkav ist.

In vorheriger Teilaufgabe habe ich bereits gezeigt, dass es sich beim Punkt $({}^{-947}/_{478} \; ; \; -0{,}76)$ um einen Wendepunkt handelt.
Nach [2.1.11 Folgerung 11.2.7] wechselt die Funktion an ihrer Wendestelle zwischen konkav und konvex. In vorheriger Teilaufgabe habe ich gezeigt, dass der Funktionswert der zweiten Ableitung links der Wendestelle kleiner 0 und rechts der Wendestelle größer Null ist. Nach [2.1.11 Satz 11.2.6] ist die Funktion also konkav im Intervall $I_1 := [-\infty, {}^{-947}/_{478}] \subseteq D$ und konvex im Intervall $I_2 = [{}^{-947}/_{478}, \infty]$ ist.
Da es keine weiteren Wendestellen gibt, sind das alle Intervalle.

4.) Skizze des Graphen Γ_d

Aus vorherigen Teilaufgaben ergeben sich folgende interessante Punkte:

Stützstellen:
$s_0 = (-4 \; ; \; 2{,}5)$
$s_1 = (0 \; ; \; -4)$
$s_2 = (2 \; ; \; 0)$
$s_3 = (2{,}5 \; ; \; 3)$

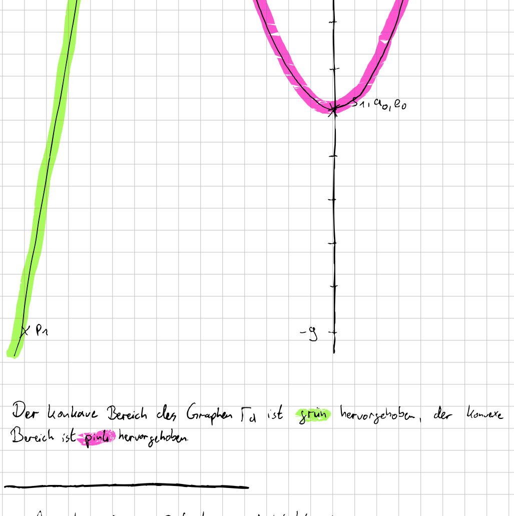
Extremwerte:
$e_0 = (0{,}2 \; ; \; -4)$
$e_1 = (-4{,}2 \; ; \; 2{,}5)$

Wendepunkt
$w_0 \approx (-2 \; , \; -0{,}75)$

Nullstellen:
$n_0 \approx s_2$
$n_1 \approx (-5{,}6 \; ; \; 0)$
$n_2 \approx (-2{,}3 \; ; \; 0)$

Y-Achsen-Abschnitt
$a_0 = s_1$

Weitere Stützpunkte, berechnet mit [1.1]
$p_0 \approx (-7 \; ; \; -9)$
$p_1 \approx (3 \; ; \; 7)$



Der konkave Bereich des Graphen Γ_d ist grün hervorgehoben, der konvexe Bereich ist pink hervorgehoben.

Anmerkung 1 zum Definitions- und Wertebereich.
Nach [2.3.9 Aufgabe 1] sind Polynomfunktionen stetig auf $\mathbb{R}$, somit wähle ich $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich.
Da es sich um eine Polynomfunktion dritten Grades handelt, erreicht diese Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ aus $\mathbb{R}$. Somit wähle ich als Wertebereich $\mathbb{R}$ unbeschränkt nach [2.1.7 Definition 7.1.5] und [2.1.7 Satz 7.1.6].

Aufgabe 5) Berechnungen teilweise mit [1.1]

$$g := \frac{5 \cdot \exp(x^{0,5}) \cdot 8 \cdot \exp(x - 1/4)}{7 \cdot \ln(x^3 + \frac{1}{4})} + 3 \cdot \cos(x^2 - \frac{1}{4})$$

Zerlegung der Funktion in einzelne, kleine Funktionen nach [2.3.8 Aufgabe 2] und [2.3.9 Aufgabe 1].

Funktionen	Konstante Funktionen
$f_0(x) = \exp(x)$	$c_0(x) := 3$
$f_1(x) = \ln(x)$	$c_1(x) := 5$
$f_2(x) = \cos(x)$	$c_2(x) := 7$
$f_4(x) = x^{0,5}$	$c_3(x) := 8$
$f_5(x) = x - 1/4$	
$f_6(x) = x^3 + 1/4$	
$f_7(x) = x^2 - 1/4$	

Verknüpfungen

$v_0(x) := f_0(x) \circ f_4(x) \quad = \exp(x^{0,5})$

$v_1(x) := c_1 \cdot v_0(x) \quad = 5 \cdot \exp(x^{0,5})$

$v_2(x) := f_0(x) \circ f_5(x) \quad = \exp(x - 1/4)$

$v_3(x) := c_3 \cdot v_2(x) \quad = 8 \cdot \exp(x - 1/4)$

$v_4(x) := v_1(x) \cdot v_3(x) \quad = 5 \cdot \exp(x^{0,5}) \cdot 8 \cdot \exp(x - 1/4)$

$v_5(x) := f_1(x) \circ f_6(x) \quad = \ln(x^3 + 1/4)$

$v_6(x) := c_2 \cdot v_5(x) \quad = 7 \cdot \ln(x^3 + 1/4)$

$v_7(x) := f_2(x) \circ f_7(x) \quad = \cos(x^2 - 1/4)$

$v_8(x) := c_0 \cdot v_7(x) \quad = 3 \cdot \cos(x^2 - 1/4)$

$v_9(x) := v_4(x) / v_6(x) \quad = \dfrac{5 \cdot \exp(x^{0,5}) \cdot 8 \cdot \exp(x - 1/4)}{7 \cdot \ln(x^3 + 1/4)}$

$g(x) = v_{10}(x) := v_9(x) + v_8(x) \quad = \dfrac{5 \cdot \exp(x^{0,5}) \cdot 8 \cdot \exp(x - 1/4)}{7 \cdot \ln(x^3 + 1/4)} + 3 \cdot \cos(x^2 - 1/4)$

Nachdem ich die Funktion in elementare Funktionen und deren Verknüpfungen zerteilt habe, bestimme ich für jede Funktion den jeweiligen Definitions- und Wertebereich auf dem sie stetig ist nach [2.1.9 Satz 9.3.5 und Satz 9.3.6], jeweils nach Bedarf von der Funktion g.

$f_0: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [5.3] $x \mapsto f_0(x) = \exp(x)$

$f_1: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ [5.4] $x \mapsto f_1(x) = \ln(x)$

$f_2: \mathbb{R} \to [-1;1] \quad x \mapsto f_2(x) = \cos(x)$

$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto f_4(x) = x^{0,5}$

$f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f_5(x) = x - 1/4$

$f_6: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f_6(x) = x^3 + 1/4$

$f_7: \mathbb{R} \to [-1/4; \infty[\quad x \mapsto f_7(x) = x^2 - 1/4$

$v_0: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$v_1: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$v_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$v_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$v_4: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$v_5: x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x > \sqrt[3]{-1/4}$ NR1

$v_6: x \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x > \sqrt[3]{-1/4}$

$v_7: \mathbb{R} \to [-1;1]$

$v_8: \mathbb{R} \to [-3;3]$

$v_9: x \in \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x > \sqrt[3]{-1/4} \wedge x \neq \sqrt[3]{3/4}$ NR2

$v_{10}: x \in \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x > \sqrt[3]{-1/4} \wedge x \neq \sqrt[3]{3/4}$

NR1: $x^3 + 1/4 > 0 \quad | -1/4$

$\Rightarrow x^3 > -1/4 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow x > \sqrt[3]{-1/4}$

NR2: $7 \cdot \ln(x^3 + 1/4) \neq 0$ Anmerkung: $\ln(1) = 0$

$\Rightarrow x^3 + 1/4 \neq 1 \quad | -1/4$

$\Rightarrow x^3 \neq 3/4 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow x \neq \sqrt[3]{3/4}$

Die Betrachtung der Definitions- und Wertebereiche der Elementarfunktionen und ihre Verknüpfungen hat ergeben, dass die Funktion g stetig auf

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt[3]{-1/4} \wedge x \neq \sqrt[3]{3/4}\}$$

$$g: D \to \mathbb{C}$$

Aufgabe 6) Berechnungen teilweise mit [1.1]

$S: D \to W,$
$X \mapsto s(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3) - 2 \cdot \cos(x^{-2} - 3) - 2 \cdot \ln(x^{-2} + 3)$

Nach [2.3.9 Aufgabe 1] zerteile ich die Funktion s in kleinere

Funktionen

$f_0(x) := x^{-3}$
$f_1(x) := x^{-2} - 3$
$f_2(x) := x^{-2} + 3$
$f_3(x) := \ln(x)$
$f_4(x) := \cos(x)$
$f_5(x) := \sin(x)$

Konstanten

$c_0 = 2$
$c_1 = 3$
$c_2 = -2$
$c_3 = -3$

Verknüpfungen

$V_0(x) := f_5(x) \circ f_0(x) = \sin(x^{-3})$
$V_1(x) := c_1 \cdot V_0(x) = 3 \cdot \sin(x^{-3})$
$V_2(x) := V_1(x) + c_3 = 3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3$
$V_3(x) := f_4(x) \circ V_2(x) = \cos(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3)$
$V_4(x) := c_0 \cdot V_3(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3)$
$V_5(x) := f_4(x) \circ f_1(x) = \cos(x^{-2} - 3)$
$V_6(x) := c_2 \cdot V_5(x) = -2 \cdot \cos(x^{-2} - 3)$
$V_7(x) := f_3(x) \circ f_2(x) = \ln(x^{-2} + 3)$
$V_8(x) := c_2 \cdot V_7(x) = -2 \cdot \ln(x^{-2} + 3)$
$V_9(x) := V_4(x) + V_6(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3) - 2 \cdot \cos(x^{-2} - 3)$
$s(x) = V_{10}(x) := V_9(x) + V_8(x) = 2 \cdot \cos(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3) - 2 \cdot \cos(x^{-2} - 3) - 2 \cdot \ln(x^{-2} + 3)$

Im zweiten Schritt leite ich zuerst die Elementarfunktionen nach [2.1.10 Satz 10.2.8] ab. Alle Elementarfunktionen von s sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$, Ausnahme $f_3(x)$.

$f_0'(x) := -3x^{-4}$
$f_1'(x) := -2x^{-3}$
$f_2'(x) := -2x^{-3}$
$f_3'(x) := 1/x$ für $x \in \mathbb{R}^+$
$f_4'(x) := -\sin(x)$
$f_5'(x) := \cos(x)$

Anschließend leite ich die verknüpften Funktionen ab. Dafür prüfe ich zunächst, ob die Verknüpfungen nach [2.1.10 Satz 10.3.1] ebenfalls differenzierbar sind und leite anschließend nach den Ableitungsregeln nach [2.1.10 Satz 10.3.2] ab.

$V_0(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_0'(x) = f_5'(f_0(x)) \cdot f_0(x)' = \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$

$V_1(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_1'(x) = c_1 \cdot V_0'(x) = 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$

$V_2(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_2'(x) = V_1'(x) + c_3'(x) = V_1'(x) = 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$

$V_3(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_3'(x) = f_4'(V_2(x)) \cdot V_2'(x) = -\sin(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3) \cdot 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$

$V_4(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_4'(x) = c_0 \cdot V_3'(x) = 2 \cdot (-\sin(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3)) \cdot 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$

$V_5(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_5'(x) = f_4'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = -\sin(x^{-2} - 3) \cdot (-2)x^{-3}$

$V_6(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_6'(x) = c_2 \cdot V_5'(x) = 2 \cdot \sin(x^{-2} - 3) \cdot (-2)x^{-3}$

$V_7(x)$ ist differenzierbar auf $\{x \in \mathbb{R} : x > -0{,}5774\}$ siehe NR 1
$V_7'(x) = f_3'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = (1/(x^{-2} + 3)) \cdot (-2)x^{-3}$

$V_8(x)$ ist differenzierbar auf $\{x \in \mathbb{R} : x > -0{,}5774\}$
$V_8'(x) = c_2 \cdot V_7'(x) = (1/(x^{-2} + 3)) \cdot 4x^{-3}$

$V_9(x)$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$
$V_9'(x) = V_4'(x) + V_6'(x) = 2 \cdot (-\sin(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3)) \cdot 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$
$+ 2 \cdot \sin(x^{-2} - 3) \cdot (-2)x^{-3}$

$V_{10}(x) = s(x)$ ist differenzierbar auf $\{x \in \mathbb{R} : x > -0{,}5774\}$
$V_{10}'(x) = V_9'(x) + V_8'(x) = 2 \cdot (-\sin(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3)) \cdot 3 \cdot \cos(x^{-3}) \cdot (-3x^{-4})$
$-4 \cdot \sin(x^{-2} - 3) \cdot x^{-3}$
$+ (1/(x^{-2} + 3)) \cdot 4x^{-3}$

Daraus folgt

$$s': D \to \mathbb{R},\ x \mapsto s'(x) = 18 \cdot \sin(3 \cdot \sin(x^{-3}) - 3) \cdot \cos(x^{-3}) \cdot x^{-4} - 4 \cdot \sin(x^{-2} - 3) \cdot x^{-3} + \frac{4 \cdot x^{-3}}{x^{-2} + 3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > -0{,}5774\} \subseteq \mathbb{R}$$

Nebenrechnung 1

Nach [2.1.10 Satz 10.2.8] ist $\ln(x)$ nur auf $x \in \mathbb{R}^+$ differenzierbar. Da in der verknüpften Funktion $V_7(x)$ der natürliche Logarithmus auf das Ergebnis der Funktion $f_2(x)$ angewandt. Entsprechend muss der Definitionsbereich von $f_2(x)$ so eingeschränkt werden, dass der Wertebereich dieser Funktion $W \subseteq \mathbb{R}^+$ ist. Dafür stelle ich folgende Ungleichung auf und stelle nach x um

$f_2(x) > 0$
$\Rightarrow x^{-2} + 3 > 0$
$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + 3 > 0$
$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > -3$
$\Rightarrow x > \sim -0{,}5774$

Der letzte Schritt ist eine Annäherung an x, die ich durch Ausprobieren mittels [1.1] auf die vierte Nachkommastelle angenähert habe.
Somit ist der Definitionsbereichs der Funktion $V_7(x)$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > -0{,}5774\}$$

Aufgabe 7) Berechnungen teilweise mit [1.1]

Gegeben ist das Integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\sin^2(c) + |\sin(c)|)\,dc$$

mit dem Integrand $z(c)$. Im ersten Schritt soll das Intervall in acht gleich große Teilintervalle zerteilt werden. Nach [2.1.12 Folie 12-8]

$$Z := \{\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_8\}$$

$$\Rightarrow Z = \{-4\pi/8; -3\pi/8; -2\pi/8; -\pi/8; 0; \pi/8; 2\pi/8; 3\pi/8; 4\pi/8\}$$

$$\Rightarrow I = [-\pi/2; \pi/2] = \bigcup_{i=1}^{8} [\alpha_{i-1}; \alpha_i]$$

$$= [\alpha_0; \alpha_1] \cup [\alpha_1; \alpha_2] \cup \dots \cup [\alpha_7; \alpha_8]$$

$$= [-4\pi/8; -3\pi/8] \cup [-3\pi/8; -2\pi/8] \cup [-2\pi/8; -\pi/8] \cup [-\pi/8; 0]$$
$$\cup [0; \pi/8] \cup [\pi/8; 2\pi/8] \cup [2\pi/8; 3\pi/8] \cup [3\pi/8; 4\pi/8]$$

Anschließend bestimme ich die kleinsten und größten Funktionswerte pro Intervall. Nach Aufgabenstellung darf ich davon ausgehen, dass innerhalb eines Intervalls der Integrand entweder monoton wächst oder fällt. Nach [2.1.11 Satz 11.1.3] kann ich also davon ausgehen, dass die Funktionswerte an den Intervallsgrenzen jeweils das Infimum und Supremum des Intervalls ist nach [2.1.11 Folie 12-13]. Dafür bestimme ich die Funktionswerte des Integranten an den Teilintervallsgrenzen mittels [1.1] gerundet auf vier Nachkommastellen und fasse die Ergebnisse in einer Wertetabelle zusammen.

c_k	$z(c_k)$
$-4\pi/8$	7,3891
$-3\pi/8$	5,9147
$-2\pi/8$	3,3438
$-1\pi/8$	1,6975
0	1
$1\pi/8$	1,6975
$2\pi/8$	3,3438
$3\pi/8$	5,9147
$4\pi/8$	7,3891

Die Wertetabelle zeigt, dass der Integrand auf dem Intervall $[-\pi/2; 0]$ monoton fallend und auf dem Intervall $[0; \pi/2]$ monoton wachsend ist.

Anschließend bestimme ich nach [2.1.12 Folie 12-13] die Werte für m_k und M_k für jedes Intervall, abgelesen aus der Wertetabelle.

$$m_k := \inf\{z(c) : c \in [\alpha_{k-1}; \alpha_k]\}$$
$$M_k := \sup\{z(c) : c \in [\alpha_{k-1}; \alpha_k]\}$$

$m_1 \approx 5,9147$ $\quad M_1 \approx 7,3891$
$m_2 \approx 3,3438$ $\quad M_2 \approx 5,9147$
$m_3 \approx 1,6975$ $\quad M_3 \approx 3,3438$
$m_4 \approx 1$ $\quad M_4 \approx 1,6975$
$m_5 \approx 1$ $\quad M_5 \approx 1,6975$
$m_6 \approx 1,6975$ $\quad M_6 \approx 3,3438$
$m_7 \approx 3,3438$ $\quad M_7 \approx 5,9147$
$m_8 \approx 5,9147$ $\quad M_8 \approx 7,3891$

Abschließend berechne ich die Ober- bzw. Untersumme über die acht Teilintervalle nach [2.1.12 Folie 12-13].

$$U(z, Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$
$$O(z, Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

$$U(z, Z) = \sum_{k=1}^{8} m_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(z, Z) \approx 5,9147(-4\pi/8 - -3\pi/8) + 3,3438(-3\pi/8 - -2\pi/8) + 1,6975(-2\pi/8 - -1\pi/8) + 1(0 - -\pi/8) + 1(1\pi/8 - 0) + 1,6975(2\pi/8 - 1\pi/8) + 3,3438(3\pi/8 - 2\pi/8) + 5,9147(4\pi/8 - 3\pi/8)$$

$$\Rightarrow U(z, Z) \approx 1\pi/8\,(5,9147 + 3,3438 + 1,6975 + 1 + 1 + 1,6975 + 3,3438 + 5,9147)$$

$$\Rightarrow U(z, Z) \approx 1\pi/8 \cdot 23,912$$

$$\Rightarrow U(z, Z) \approx 9,3902$$

$$O(z, Z) = \sum_{k=1}^{8} M_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

$$\Rightarrow O(z, Z) \approx 7,3891(-4\pi/8 - -3\pi/8) + 5,9147(-3\pi/8 - -2\pi/8) + 3,3438(-2\pi/8 - -1\pi/8) + 1,6975(0 - -\pi/8) + 1,6975(1\pi/8 - 0) + 3,3438(2\pi/8 - 1\pi/8) + 5,9147(3\pi/8 - 2\pi/8) + 7,3891(4\pi/8 - 3\pi/8)$$

$$\Rightarrow O(z, Z) \approx 1\pi/8 \cdot (7,3891 + 5,9147 + 3,3438 + 1,6975 + 1,6975 + 3,3438 + 5,9147 + 7,3891)$$

$$\Rightarrow O(z, Z) \approx 1\pi/8 \cdot 36,6902$$

$$\Rightarrow O(z, Z) \approx 14,4082$$

Mittels der Ober- und Untersumme des Integrals kann nun ein Intervall festgelegt werden, in dem sich der tatsächliche Wert des Integrals befindet. Dieses könnte immer genauer bestimmt werden, indem das Integralintervall in immer kleinere Teilintervalle aufgeteilt werden würde, bis diese eine Länge gegen 0 haben nach [2.1.12 Folie 12-8].
Ich führe eine Probe meines Intervalls, indem ich mittels der Integralfunktion von [1.1] eine genauere Annäherung des tatsächlichen Integralwerts bestimme und prüfe, ob dieses innerhalb meines bestimmten Ergebnisintervalls liegt.

Probe

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z(c)\,dc \approx 11,924$$

$$\Rightarrow 11,924 \in [U(z, Z); O(z, Z)]$$

$$\Rightarrow 11,924 \in [9,3902; 14,4082]$$

Die Probe stützt meine Annahme für das Ergebnisintervall.

Re: Integral zum Verkehrsfluss

From: Franjo Gießel <FraGiessel@smail.Hs-Bremerhaven.de>
To: Volker Treppmann <v.treppmann@verkehrsamt.bremerhaven.de>
Date: Thu, 28 September 2023 19:32:28 +0200
Security: S/MIME signed
Attachments: 1

Liebe Ingenieur:innen des Verkehrsamt Bremerhaven,

vielen Dank für Ihre Anfrage. Selbstverständlich kann ich Ihnen bei Ihrem Integralproblem helfen. Durch mein Wissen und die erlangten Fähigkeiten aus dem Modul Mathematik 2 meines Studiums, kann ich Ihnen folgende Antwort geben:

Der Integrationswert von

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(\sin^2(c) + |\sin(c)|)\,dc$$

liegt zwischen 9,39 und 14,40.

Ich hoffe, ich konnte Ihnen weiterhelfen. Sollten Sie noch Fragen haben, freue ich mich, Ihnen diese zu beantworten.

Viele Grüße
Franjo Gießel

E Franjo.Giessel@smail.Hs-Bremerhaven.de
[redacted]

Attachments

Name	Size
Abgabe-fragiessel.pdf	15,7 MB

Aufgabe 8) Berechnungen teilweise mit [1.1]

Die Aufgabenstellung fordert, herauszufinden, ob die gegebene Funktion h ein Minimum besitzt. Außerdem muss vor der Anwendung jeder Schritte geprüft werden, ob diese durchgeführt werden dürfen.

Gegeben ist die Funktion h mit den Veränderlichen t_1, t_2, t_3

$$h(t_1,t_2,t_3) = -6 \cdot t_1 \cdot t_2 - 7 \cdot t_1 \cdot t_3 + 8 \cdot t_2^2 + 29 t_3^2 + 130$$

Ich gehe nach [2.3.13 Aufgabe 6 b)] vor.

I) Bestimmen des Gradienten

Zur Bestimmung des Gradienten nach [2.1.14 Definition 14.1.5] leite ich die Funktion partiell ab nach [2.1.14 Definition 14.1.3]. Dafür muss h differenzierbar in Richtung t_1, t_2 und t_3 sein. Die Funktion ist in jede Richtung betrachtet ein Polynom zweiten Grades und ist somit nach [2.3.9 Aufgabe 1] zwei Mal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ nach [2.3.13 Aufgabe 6]. Damit darf ich die partiellen Ableitungen bilden.

Nach [2.1.14 Folie 14-8]

$$\nabla h(t_1,t_2,t_3) = \left(\frac{d}{d t_1} h(t_1,t_2,t_3), \frac{d}{d t_2} h(t_1,t_2,t_3), \frac{d}{d t_3} h(t_1,t_2,t_3)\right)$$
$$= \Big(\frac{d}{d t_1}(-6t_1t_2 - 7t_1t_3 + 8t_2^2 + 29t_3^2 + 130),$$
$$\frac{d}{d t_2}(-6t_1t_2 - 7t_1t_3 + 8t_2^2 + 29t_3^2 + 130),$$
$$\frac{d}{d t_3}(-6t_1t_2 - 7t_1t_3 + 8t_2^2 + 29t_3^2 + 130) \Big)$$
$$= (-6t_2 - 7t_3, -6t_1 + 16t_2, -7t_1 + 58t_3)$$

Wie oben beschrieben ist jede Komponente ein Polynom und deswegen wieder partiell differenzierbar nach [2.1.14 Definition 14.1.6 und Folie 14-10].

$$H_h(t) = \begin{pmatrix} d/dt_1\, d/dt_1\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_1\, d/dt_2\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_1\, d/dt_3\, h(t_1,t_2,t_3) \\ d/dt_2\, d/dt_1\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_2\, d/dt_2\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_2\, d/dt_3\, h(t_1,t_2,t_3) \\ d/dt_3\, d/dt_1\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_3\, d/dt_2\, h(t_1,t_2,t_3) & d/dt_3\, d/dt_3\, h(t_1,t_2,t_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d/dt_1(-6t_2-7t_3) & d/dt_1(-6t_1+16t_2) & d/dt_1(-7t_1+58t_3) \\ d/dt_2(-6t_2-7t_3) & d/dt_2(-6t_1+16t_2) & d/dt_2(-7t_1+58t_3) \\ d/dt_3(-6t_2-7t_3) & d/dt_3(-6t_1+16t_2) & d/dt_3(-7t_1+58t_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 \\ -6 & 16 & 0 \\ -7 & 0 & 58 \end{pmatrix}$$

Nach [2.1.14 Folgerung 14.2.4] sind Nullstellen des Gradienten (also als homogenes LGS) potentielle Extremstellen.

$$\nabla h(t_1,t_2,t_3) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & -7 & 0 \\ -6 & 16 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 58 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ -7 & 0 & 58 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{I = I \cdot \tfrac{-1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ -7 & 0 & 58 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{III = III + 7I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & -56/3 & 58 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{II = II \cdot \tfrac{-1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/6 & 0 \\ 0 & -56/3 & 58 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{III = III - \tfrac{-56}{3} II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 718/9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{III = III \cdot \tfrac{9}{718}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{II = II - 7/6 \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Rightarrow}{I = I - \tfrac{-8}{3} \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ergibt sich die Nullstelle $\tilde{t} := (t_1; t_2; t_3) = (0; 0; 0)$
Um zu prüfen, ob es sich bei der gefundenen Nullstelle um ein Minimum handelt, prüfe ich, ob die Hesse-Matrix positiv definit ist nach [2.1.14 Satz 14.2.5].
Dafür prüfe ich, ob die Hauptminoren positiv sind nach [5.2] und [2.1.6 Satz 6.0.18].

$$\Delta_1 := \det(h_{h\,jk}(\tilde{t}))_{j,k}^1 = \det(0) = 0 \not> 0$$

Der erste Hauptminor widerspricht der Folgerung für positive Definitheit. Somit ist die Matrix nicht positiv definit und es handelt sich somit nicht um ein Minimum. Die Funktion h hat somit kein Minimum, da es nur eine Extremstelle gibt und diese kein Minimum ist.

Liste der Hilfsmittel für die Hausarbeit SoSe 2023

`tags: 2.12 Mathematik 2`

Franjo Gießel
39303

Taschenrechner

1. Taschenrechner
    1. Texas Instruments TI-84 Plus CE-T
    2. *[PLATZHALTER] Fabrikat (Hersteller), Modellnummer*

Vorlesungsunterlagen

2. Vorlesungsunterlagen
    1. Skript zur Vorlesung von Prof. Dr.-Ing. Henrik Lipskoch SoSe 2023
        1. Kapitel 1 - Vektoren und Vektorräume
        2. Kapitel 2 - Matrizen und lineare Abbildungen
        3. Kapitel 3 - Lösen linearer Gleichugssysteme
        4. Kapitel 4 - Determinante
        5. Kapitel 5 - Skalarprodukt und Orthogonalität
        6. Kapitel 6 - Eigenwerte und Eigenvektoren
        7. Kapitel 7 - Analysis - Funktionen und Interpolation
        8. Kapitel 8 - Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen
        9. Kapitel 9 - Grenzwerte und Stetigkeit einer Funktion
        10. Kaiptel 10 - Differentialrechnung
        11. Kapitel 11 - Differentialrechnung 2
        12. Kapitel 12 - Integralrechnung
        13. Kapitel 13 - Taylor-Approximation
        14. Kapitel 14 - Funktionen mehrerer Veränderlicher
    2. Übungsblätter
        1. Übung 01
        2. Übung 02
        3. Übung 03

        4. Übung 04
        5. Übung 05
        6. Übung 06
        7. Übung 07
        8. Übung 08
        9. Übung 09
        10. Übung 10
        11. Übung 11
        12. Übung 12
        13. Übung 13
    3. Lösungen zu den Übungsblätter
        1. Lösung 01
        2. Lösung 02
        3. Lösung 03
        4. Lösung 04
        5. Lösung 05
        6. Lösung 06
        7. Lösung 07
        8. Lösung 08
        9. Lösung 09
        10. Lösung 10
        11. Lösung 11
        12. Lösung 12
        13. Lösung 13

Menschen

3. Menschen
    1. [redacted]
    2. [redacted]
    3. [redacted]
    4. *[PLATZHALTER] Name, Vorname*

Bücher

4. Bücher
    1. “Mathematik für Informatiker, Band 1”, G. Teschl und S. Teschl, Springer, 2013, 978-3-642-37971-0

2. “Mathematik für Informatiker, Band 2”, G. Teschl und S. Teschl, Springer, 2014, 978-3-642-54273-2
3. *[PLATZHALTER] Titel, Autor:innen, Verlag, Jahr, ISBN, verwendete Seiten*

Webseiten

5. Webseiten
    1. 25. September 2023, 17:53 Uhr; https://matrixcalc.org/ (https://matrixcalc.org/)
    2. 26. September 2023, 15:16 Uhr; https://homepage.univie.ac.at/johann.brandstetter/mathe2_folien/definitheit.pdf (https://homepage.univie.ac.at/johann.brandstetter/mathe2_folien/definitheit.pdf)
    3. 27. September 2023, 16:38 Uhr; https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_für_Nicht-Freaks:_Herleitung_und_Definition_der_Exponentialfunktion (https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Herleitung_und_Definition_der_Exponentialfunktion)
    4. 27. September 2023, 16:45 Uhr; https://www.mathe-online.at/mathint/fun2/i_lexikon_Steckbrief_ln.html (https://www.mathe-online.at/mathint/fun2/i_lexikon_Steckbrief_ln.html)
    5. *[PLATZHALTER] Datum, Uhrzeit letzter Zugriff; URL (Permalink)*

Software

6. Software
    1. *[PLATZHALTER] Version, Betriebssystem mit Version, benutzte Software-Pakete, Kommandos zur Erzeugung der Ergebnisse, Quellcode (falls selbst geschrieben)*